Mathematische Analyse von Algorithmen
Methode von Rice

Nikolaus Hammler

13. Mai 2008

1 Aufgabenstellung

Es soll

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{1}{k+\alpha}$$
$$\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$$

mit der Methode von Rice berechnet werden.

2 Berechnung der Summe

Die Idee der Rice Methode ist es, die Summe als Summe von Residuen zu betrachten. Daher kann A_n wie folgt als Kurvenintegral angeschrieben werden (Herleitung siehe VO-Mitschrift):

$$A_n = \oint_{\mathcal{C}_R} \frac{n! \cdot (-1)^n}{z(z-1)(z-2)\dots(z-n)} \frac{1}{z+\alpha} dz$$

Diese Funktion hat nun einfache Pole bei $\{0, 1, \dots, n\}$ sowie den einfachen Pol $-\alpha$ der rationalen Funktion $\frac{1}{z+\alpha}$. Da α keine natürliche Zahl sein kann, können keine mehrfachen Pole entstehen.

Um das korrekte Ergebnis für A_n zu erhalten, muss über die „Rice Contour“ $\mathcal{C}_R$ integriert werden. Dabei muss darauf geachtet werden, nicht den Pol bei $-\alpha$ einzuschließen. Dafür gibt es die Möglichkeiten in Abbildung 1 und 2.

Beide sind jedoch äquivalent, da laut Residuensatz die Form der Kontur egal ist.

Nun wird der Radius der Kontur $\mathcal{C}_R$ nach ∞ ausgedeht. Dabei wird zwangsläufig in einer Richtung der Pol α „eingefangen“. Der Radius kann in alle Richtungen (ausser der Richtung wo der α-Pol liegt) problemlos ausgedehnt werden, da dort keine Pole mehr existieren und laut Residuensatz das Ergebnis gleich bleibt. Wird der Radius auch in die Richtung des α-Pols nach ∞ ausgedeht, wird das Ergebnis zwangsläufig verfälscht, da über einen zusätzlichen Pol integriert wird. Um dennoch das korrekte Ergebnis zu erhalten, muss das Residuum des Pols wieder abgezogen werden:

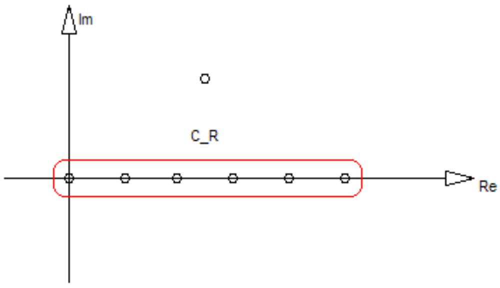

Abbildung 1: Rice Contour

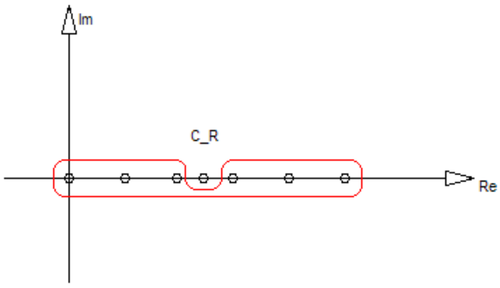

Abbildung 2: Rice Contour mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}_R} \frac{n! \cdot (-1)^n}{z(z-1)(z-2)\dots(z-n)} \frac{1}{z+\alpha} dz \\
&= \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=R} \frac{n! \cdot (-1)^n}{z(z-1)(z-2)\dots(z-n)} \frac{1}{z+\alpha} dz \\
&- \operatorname{Res}(A_z, -\alpha)
\end{aligned}$$

Nun wird das Integral betragsmäßig abgeschätzt. Da der Integrationsweg über den konstanten Radius R geht, kann das Integral betragsmäßig abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=R} \frac{n! \cdot (-1)^n}{z(z-1)(z-2)\dots(z-n)} \frac{1}{z+\alpha} dz \right| \\
\leq\ & 2\pi R \frac{1}{2\pi} \frac{n! \cdot (-1)^n}{R(R-1)(R-2)\dots(R-n)} \frac{1}{R+\alpha} \\
=\ & \frac{n! \cdot (-1)^n}{(R-1)(R-2)\dots(R-N)} \frac{1}{R+\alpha}
\end{aligned}$$

Lässt man den Integrationsradius nach unendlich gehen ($R \to \infty$), so gilt für den Grenzwert:

$$
\begin{aligned}
& \lim_{R\to\infty} \frac{n!\cdot(-1)^n}{(R-1)(R-2)\dots(R-N)(R+\alpha)} \\
= \;& n!\cdot(-1)^n \lim_{R\to\infty} \frac{1}{(R-1)(R-2)\dots(R-N)(R+\alpha)} \\
= \;& 0
\end{aligned}
$$

Das Integral wird also null und für die ursprüngliche Summe A_n bleibt nur das abgezogene Residuum übrig:

$$
A_n = -\mathrm{Res}(A_z, -\alpha) = -\mathrm{Res}_{z=-\alpha}\left(\frac{n!\cdot(-1)^n}{z(z-1)(z-2)\dots(z-n)(z+\alpha)}\right)
$$

Das Residuum des einfachen Pols berechnet sich mit:

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{Res}(A_z,-\alpha) &= -\lim_{z\to-\alpha}(z+\alpha)\frac{1}{z+\alpha}\cdot\frac{n!\cdot(-1)^n}{z(z-1)(z-2)\dots(z-n)} \\
&= -\left.\frac{n!\cdot(-1)^n}{z(z-1)(z-2)\dots(z-n)}\right|_{z=-\alpha} \\
&= -\frac{n!\cdot(-1)^n}{-\alpha(-\alpha-1)(-\alpha-2)\dots(-\alpha-n)}
\end{aligned}
$$

Der Zähler besteht nun aus $(n+1)$ Faktoren mit $-\alpha$. Aus diesen wird nun jeweils (-1) herausgehoben, was $(-1)(-1)^n$ entspricht:

$$
\begin{aligned}
A_n &= -\frac{n!\cdot(-1)^n}{(-1)(-1)^n(\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n))} \\
&= \frac{n!}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)} \\
&= \frac{n!}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}\cdot\frac{n^\alpha}{n^\alpha}
\end{aligned}
$$

Wenn nun n sehr groß wird, d.h. $n\to\infty$ folgt durch Einsetzen der Γ-Funktion:

$$
A_n = \frac{\Gamma(\alpha)}{n^\alpha}
$$

3 Kontrolle durch Paper von Flajolet, Sedgewick

Das Verfahren ist auch in einigen Papern beschrieben, die ich bei meiner Recherche gefunden habe, z.B. in [1] und [2]. Die Summe mit $\phi(k) = \frac{1}{k+\alpha}$ kann nach Lemma 1 in der Integraldarstellung wie folgt angeschrieben werden ([1]):

$$
\sum_{k=n_0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\phi(k) = \frac{(-1)^n}{2\pi j}\oint_{\mathcal{C}_R}\phi(s)\frac{n!}{s(s-1)\dots(s-n)}ds
$$

Nach Theorem 1 folgt für den rationalen Fall ($\phi(k)$ ist hier rational) ([1]):

$$\sum_{k=n_0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \phi(k) = -(-1)^n \sum_s \mathrm{Res} \left[\phi(s) \frac{n!}{s(s-1)\dots(s-n)} \right]$$

Bei uns gibt es aber nur einen einfachen Pol bei $-\alpha$, sodass für A_n übrig bleibt:

$$A_n = -(-1)^n \mathrm{Res}_{z=-\alpha} \left[\frac{n!}{z(z-1)\dots(z-n)} \right] = \dots = \frac{\Gamma(\alpha)}{n^\alpha}$$

was genau mit der eigenen Lösung übereinstimmt.

Literatur

[1] Philippe Flajolet, Robert Sedgewick. *Mellin transforms and asymptotics: Finite differences and Rice's Integrals.* Theoretical Computer Science 144 (1995) 101-124

[2] Bruno Salvy. *Algorithms seminar, 1993-1994, Rapport de recherche.* Institut National De Recherche En Informatique Et Automatique (INRIA), No 2381 (ISSN 0249-6399)