Äquivalenz der Gaußdarstellung und der Henkeldarstellung der Γ-Funktion

Nikolaus Hammler
nobaq@sbox.tugraz.at

01. Mai 2008

Es ist zu zeigen:

$$\begin{pmatrix} n+\alpha-1 \\ n \end{pmatrix} \sim \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma\,(\alpha)}$$

Für den Binomialkoeffizienten gilt:

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k!)} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k)}{k!}$$

und damit für

$$\begin{pmatrix} n+\alpha-1 \\ n \end{pmatrix} = \frac{(n+\alpha-1)(n+\alpha-2)\ldots\alpha}{n!} \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)}$$

Wenn sich die linke wie die rechte Seite verhält, dann unterscheiden sich beide Seiten nur durch einen Proportionalitätsfaktor bzw. bzw. der Quotient muss im Grenzwert $n \to \infty$ eins werden:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+\alpha-1)(n+\alpha-2)\ldots\alpha}{n!\cdot n^{\alpha+1}} \cdot \Gamma(\alpha) = 1$$

$\Gamma(\alpha)$ kann nun vor den Limes gehoben werden, da es nicht von n abhängt:

$$\Gamma(\alpha)\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(n+\alpha-1)(n+\alpha-2)\ldots\alpha}{n!\cdot n^{\alpha+1}} = 1$$

Jetzt wird noch der Reziprokwert gebildet:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n!\cdot n^{\alpha+1}}{(n+\alpha-1)(n+\alpha-2)\ldots\alpha} = 1$$

Aus dieser Zeile erkennt man sofort, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!\cdot n^{\alpha+1}}{(n+\alpha-1)(n+\alpha-2)\ldots\alpha}$$

die Γ-Funktion sein muss. Erweitert man den Bruch mit

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{\alpha}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\alpha+n}$$

so erhält man die Darstellung der Γ-Funktion nach Gauß:

$$\begin{aligned} & \lim_{n\to\infty} \frac{n!\cdot n^{\alpha+1}}{(n+\alpha-1)(n+\alpha-2)\ldots\alpha} \cdot \frac{n}{\alpha+n} \\ = & \lim_{n\to\infty} \frac{n!\cdot n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)} \end{aligned}$$

■

Nun muss nur mehr gezeigt werden, dass die Gauß-Darstellung der Γ-Funktion äquivalent mit der Henkeldarstellung ist, d.h., dass folgende Gleichung gilt:

$$\begin{aligned} & \lim_{n\to\infty} \frac{n!\cdot n^{s+1}}{(n+s-1)(n+s-2)\ldots s} \cdot \frac{n}{s+n} \\ = & \lim_{n\to\infty} \int_0^n x^{s-1}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx \\ = & \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx \end{aligned}$$

Um das analytisch zu zeigen, wird einfach versucht, das Integral auszurechnen. Da von x^{s-1} das Integral leicht zu berechnen ist, wird die partielle Integration angewandt:

$$\begin{aligned} & \int_0^n x^{s-1}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx \\ = & \left.\frac{x^s}{s}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right|_0^n + \int_0^n \frac{x^s}{s}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1} dx \\ = & \frac{1}{s}\int_0^n x^s\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1} dx \end{aligned}$$

Nun wird noch einmal partiell integriert:

$$\begin{aligned} = & \frac{1}{s}\left(\left.\frac{x^{s+1}}{s+1}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1}\right|_0^n - \int_0^n \frac{x^{s+1}}{s+1}(n-1)\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-2}\frac{1}{n}(-1)dx\right) \\ = & \frac{1}{s}\int_0^n \frac{1}{n}\frac{1}{s+1}(n-1)x^{s+1}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-2} dx \\ = & \frac{n-1}{s\cdot n\cdot(s+1)}\int_0^n x^{s+1}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-2} dx \end{aligned}$$

Ein drittes Mal die partielle Integration angewendet ergibt:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n-1}{s(s+1)n} \cdot \\
&\quad \left(\frac{x^{s+2}}{s+2} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-2} \Bigg|_0^n - \int_0^n \frac{x^{s+2}}{s+2} (n+2) \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-3} \frac{1}{n} (-1) dx \right) \\
&= \frac{n-1}{s(s+1)n} \cdot \frac{1}{s+2} \cdot \frac{1}{n} (n-2) \int_0^n s^{s+2} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-3} dx \\
&= \frac{(n-1)(n-2)}{s(s+2)(s+2)n^2} \int_0^n x^{s+2} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-3} dx
\end{aligned}
$$

Nun lässt sich bereits eine Gesetzmäßigkeit erkennen. So liefert k-mal die partielle Integration:

$$
\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k-1)}{n^{k-1} s(s+1)(s+2)\dots(s+k-1)} \int_0^n x^{s+k-1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-k} dx
$$

bzw. $(n-1)$-mal die partielle Integration:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-(n-1)-1)}{n^{(n-1)-1} s(s+1)(s+2)\dots(s+(n-1)-1)} \cdot \\
&\quad \int_0^n x^{s+(n-1)-1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-(n-1)} dx \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1}{n^{n-1} s(s+1)(s+2)\dots(s+n-2)} \int_0^n x^{s+n-2} \left(1 - \frac{x}{n}\right) dx \\
&= \frac{n!}{n^{n-1} s(s+1)(s+2)\dots(s+n-2)} \int_0^n x^{s+n-2} \left(1 - \frac{x}{n}\right) dx
\end{aligned}
$$

Das verbleibende Integral kann nun durch eine weitere partielle Integration vollständig gelöst werden:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n!}{n^{n-1}s(s+1)(s+2)\dots(s+n-2)} \cdot \\
&\quad \left(\frac{x^{s+n-1}}{s+n-1}\left(1-\frac{x}{n}\right)\Big|_0^n - \int_0^n \frac{x^{s+n-1}}{s+n-1}\frac{1}{n}(-1)dx \right) \\
&= \frac{n!}{n^{n-1}s(s+1)(s+2)\dots(s+n-2)} \cdot \frac{1}{n}\int_0^n \frac{x^{s+n-1}}{s+n-1}dx \\
&= \frac{n!}{n^{n-1}s(s+1)(s+2)\dots(s+n-2)} \cdot \frac{1}{n(s+n-1)} \cdot \frac{x^{s+n}}{s+n}\Big|_0^n \\
&= \frac{n!}{n^{n-1}s(s+1)(s+2)\dots(s+n-2)} \cdot \frac{n^{s+n}}{n(s+n-1)(s+n)} \\
&= \frac{n!n^{s+n}}{n^n s(s+1)(s+2)\dots(s+n-2)(s+n-1)(s+n)} \\
&= \frac{n!n^s}{s(s+1)\dots(s+n)}
\end{aligned}
$$

Damit erhält man als Endergebnis

$$\lim_{s\to\infty} \frac{n!n^s}{s(s+1)\dots(s+n)} = \Gamma(s)$$

wodurch die Äquivalenz der Gaußdarstellung und der Henkeldarstellung gezeigt ist.

■